Tentamen
Mechanica & Relativiteit 2010–2011 (deel klassieke mechanica)
31 januari 2011

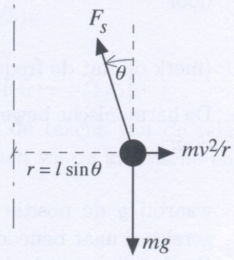
Opgave 1

a. De dimensie massa komt alleen in de variabele m voor; alle andere grootheden in het probleem, waaronder de snelheid v, bevatten slechts de dimensies lengte en tijd. Aangezien de overige grootheden geen dimensie massa in zich hebben, kan m daarvan niet afhangen. $\boxed{1}$

b. T.o.v. een meeroterend (pool-)coördinatensysteem met straal $r = l\sin\theta$ is de massa in rust.

Uit nevenstaand vrije-lichaamsdiagram volgt dan dat evenwicht vereist

$$F_s\cos\theta = mg$$
$$F_s\sin\theta = mv^2/r = mv^2/(l\sin\theta)$$



$\boxed{2}$

De trekkracht F_s wordt dus gegeven door m, g en θ als

$$F_s = mg/\cos\theta$$

c. Door deze uitdrukking voor F_s te substitueren in de horizontale evenwichtsvergelijking verkrijgen we $\boxed{2}$

$$mg\tan\theta = mv^2/(l\sin\theta) \Longrightarrow v^2 = gl\sin\theta\,\tan\theta \Longrightarrow v = \sin\theta\sqrt{gl/\cos\theta}$$

Opgave 2

a. De rechter kogel beweegt omhoog met een constante, negatieve versnelling g, zodat zijn snelheid als functie van de tijd t gegeven is door $v(t) = v - gt$. Op maximale hoogte is $v(t) = 0$, dus na een tijdsduur $t = v/g$. $\boxed{1}$

b. Om elkaar te kunnen raken moet de verticale component van u moet gelijk zijn aan v, dus

$$u\sin\varphi = v\,.$$

De horizontale component volgt uit de voorwaarde dat de linker kogel in horizontale richting de afstand d moet hebben afgelegd, d.w.z.

$$t\,u\cos\varphi = d \quad\Longrightarrow u\cos\varphi = d/t = gd/v$$

De hoek φ wordt dus bepaald door

$$\tan\varphi = v^2/(gd)$$

(onafhankelijk van de snelheid u) terwijl de grootte van u geschreven kan worden als $\boxed{2}$

$$u = \sqrt{v^2 + (gd/v)^2}$$

c. Het minimum van u in afhankelijkheid van v wordt gevonden uit $\boxed{2}$

$$\frac{du}{dv} = \frac{v - (gd)^2/v^3}{\sqrt{v^2 + (gd/v)^2}} = v\frac{1 - (gd)^2/v^4}{\sqrt{v^2 + (gd/v)^2}} = 0 \Longrightarrow v^2 = gd$$

ofwel $v = \sqrt{gd}$.

Opgave 3

a. De frequentie van een massa-veersysteem is $\sqrt{k/m}$ indien k de veerstijfheid is. Deze laatste is niet direct gegeven, maar kan worden berekend uit het gegeven dat de veer na belasting met een kracht mg een uitwijking D_1 krijgt, immers kracht is k maal uitrekking. Uit $mg = kD_1$ volgt dan $k = mg/D_1$ zodat de frequentie gegeven is door $\boxed{2}$

$$\omega = \sqrt{g/D_1}$$

(merk op dat de frequentie onafhankelijk is van m).

b. De harmonische beweging die het blokje maakt na te zijn losglaten, wordt beschreven door

$$y(t) = D_2 \cos \omega t$$

waarbij y de positie van het blokje aangeeft t.o.v. de evenwichtsstand, positief gerekend naar beneden. De evenwichtspositie $y(0) = 0$ wordt bereikt als $\omega t = \pi/2$. Op dat moment, bedraagt de snelheid $\boxed{1}$

$$\dot{y} = -\omega D_2 \sin \omega t = -\omega D_2\,.$$

c. Om het hoogste punt te bereiken is nog eenzelfde tijdsduur nodig, zodat op dat moment $\omega t = 2(\pi/2) = \pi$. Op dat moment, is de versnelling gegeven door

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 D_2 \cos \omega t = \omega^2 D_2\,.$$

Een andere mogelijkheid is om op te merken dat $y = -D_2$ op het hoogste punt en vervolgens gebruik te maken van de differentiaalvergelijking voor dit probleem: $\boxed{1}$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \Longrightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y = \omega^2 D_2\,.$$

Opgave 4

a. Voor een niet-elastische botsing geldt alleen de wet van behoud van impuls (behoud van energie blijft uiteraard ook gelden, maar levert geen nuttige informatie op omdat we niet weten hoeveel energie gedissipeerd wordt). Uit de gelijkheid van $p_{\text{voor}} = mv + 4m(-v) = -3mv$ en $p_{\text{na}} = (m + 4m)u = 5mu$ volgt dan $\boxed{1}$

$$u = -(3/5)v$$

waarbij u positief gerekend is in de richting van de beweging van m. Het samengestelde deeltje beweegt dus in dezelfde richting als de massa $4m$ oorspronkelijke deed, maar met een 40% lagere snelheid.

b. Voor een elastische botsing gelden zowel de wet van behoud van impuls als de wet van behoud van energie. Er zijn (minstens) twee oplossingsstrategieën: $\boxed{3}$

- De slimme methode, die gebruik maakt van het massamiddelpunt (CM). De snelheid u van het CM vóór de botsing wordt bepaald door de wet van behoud van impuls:
$$-3mv = (m + 4m)u \Longrightarrow u = -(3/5)v$$
De relatieve snelheden van de massa's t.o.v. van dit CM zijn
$$V_1 = v - u = (8/5)v\,, \quad V_2 = -v - u = -(2/5)v$$
De total impuls t.o.v. het CM is nul, en blijft nul ook na de botsing, zodat de relatieve snelheden na de botsing (aangegeven met ') van teken moeten omdraaien:
$$V_1' = -(8/5)v\,, \quad V_2' = (2/5)v$$
Terugrekenend naar absolute snelheden, vinden we:
$$v_1' = V_1' + u = -(11/5)v\,, \quad v_2' = V_2' + u = -(1/5)v$$
Energiebehoud is impliciet gebruikt wanneer we de tekens van de relatieve snelheden hebben omgedraaid. Ter controle kunnen we de kinetische energie vóór en na berekenen:
$$K_{\text{voor}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}4mv^2 = (5/2)mv^2$$
$$K_{\text{na}} = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}4mv_2'^2 = \frac{1}{2}mv^2[(11/5)^2 + 4(1/5)^2] = \frac{1}{2}5mv^2$$
Klopt!

- De niet-zo-slimme-methode behelst toepassing beide behoudswetten:
Behoud van impuls: $-3mv = mv_1' + 4mv_2' \Longrightarrow -3v = v_1' + 4v_2'$
Behoud van energie: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}4mv^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}4mv_2'^2 \Longrightarrow 5v^2 = v_1'^2 + 4v_2'^2$
en los uit deze 2 vergelijkingen de twee onbekenden v_1' en v_2' op. Bijvoorbeeld, los eerst op $v_1' = -(3v + 4v_2')$ en substitueer dit in de energievergelijking:
$$5v^2 = (3v + 4v_2')^2 + 4v_2'^2 = 9v^2 + 20v_2'^2 + 24vv_2'\,;$$
herrangschikken in vorm van "abc"-formule:
$$4v^2 + 24vv_2' + 20v_2'^2 = 0 \Longrightarrow 5\left(\frac{v_2'}{v}\right)^2 + 6\frac{v_2'}{v} + 1 = 0$$
en oplossen naar v_2'/v:
$$\frac{v_2'}{v} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = -3/5 \pm 2/5$$
Van deze laatste twee oplossing geeft degene met het minteken de snelheid vóór de botsing; na de botsing moet de oplossing dus zijn
$$v_2' = -(1/5)v$$
Hieruit volgt dan tenslotte:
$$v_1' = -(3v + 4v_2') = -(11/5)v$$